博士资格考试：应用数学综合（参考样卷）

试卷内容: 试卷包含两部分：第一部分是数学基础（70分），包含《偏微分方程》和《泛函分析》，是必答题；第二部分专业基础（30分），根据专业方向和招生导师的要求选做如下五个模块之一：《最优化理论与算法》、《大规模科学计算》、《高精度算法》、《计算机辅助几何设计》、《计算机图形学》。

答题要求: 所有题目的解答要有详细过程，用到的定理需要注明。

1. 数学基础（70分）

1.1 偏微分方程（30分）

一、(10分) 令$a>0$为常数，$n\geqslant 1$，设$u(x,t)$为以下波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

的光滑解，其中$\varphi(x)$和$\psi(x)$均为$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的光滑函数。

(1) 证明能量守恒: 对$\forall t\geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(|u_t|^2+a^2|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\equiv$常数。

(2) 当$\psi(x)\equiv 0$时，利用已知函数$\varphi(x)$找出解$u(x,t)$的表示式。

二、(10分) 设$c\in\mathbb{R}$为常数, 考察如下热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+cu,\ 0<x<1,\ t>0 \\ u|_{t=0}=x^2(1-x),\ 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=\sin t,\ t\geqslant 0 \end{cases}$$

(1) 求出上述问题的解以及$c=1$时解在$[0,1]\times[0,\infty)$上的最大值。

(2) 证明: 若$c<\pi^2$, 则$|u(x,t)|\leqslant 1$对所有$x\in(0,1),t>0$ 均成立。

三、(10分) 令$B_r(0)$是$\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 3)$中以原点为中心、半径为$r>0$的球。设非线性方程

$$-\Delta u+f(u,x)=0$$

在$B_{2r}(0)$内有非负解$u(x)$，其中函数$f\leq 0$连续，证明：若u在$B_r(0)$内不恒为零，则在闭球$\overline{B_r(0)}$中恒成立$u>0$。

1.2 泛函分析（40分）

一、(15分) 验证 $C[-1,1]$ 上如下定义的泛函 f 是连续线性泛函, 并求其算子范数:

$$f(x) := \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt, \quad x \in C[-1,1].$$

二、(15分) 证明: 在 ℓ^2 上, 右移位算子的共轭算子是左移位算子.

三、(10分) 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 的闭子空间, $x_0 \in H$. 证明:

$$\inf\{\|x - x_0\| : x \in M\} = \sup\{|\langle x_0, y\rangle| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\}.$$

2. 专业基础（30分）

请根据专业方向和招生导师的要求, 仅选择如下五个模块之一进行解答, 并且在此用'$\surd$'标记出您所选择的模块：
（ ）2.1 最优化理论与算法
（ ）2.2 大规模科学计算
（ ）2.3 高精度算法
（ ）2.4 计算机辅助几何设计
（ ）2.5 计算机图形学

2.1 最优化理论与算法

一、（10分）凸性与全局性
请给出凸函数的一种定义，并证明凸函数的任何局部极小点也是全局最优的。

二、（10分）无约束最优化问题的拟牛顿迭代
(a) 请给出极小化问题$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$拟牛顿迭代BFGS公式，并简要证明其收敛性。
(b) 分析拟牛顿迭代的优劣性，并指出可能的改进思路。

三、（10分）对偶理论
请给出一般二次规划问题的对偶问题和K-T条件。

2.2 大规模科学计算

一、针对非线性偏微分方程$u_t + f(u)_x = 0$，其中，$f(u)$关于u光滑。考虑如下格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n\right),$$

其中，$\hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}^+(u_j^n) + \hat{f}^-(u_{j+1}^n)$，$\hat{f}^\pm$的表达式分别如下，

$$\begin{cases} \hat{f}^+(u) = \int_0^u \max(f'(v), 0)dv + f(0), \\ \hat{f}^-(u) = \int_0^u \min(f'(v), 0)dv. \end{cases}$$

(1) 请给出该方程弱解和熵解的定义；

(2) 格式的数值解是否收敛到方程的弱解？并说明原因；

(3) 格式的数值解是否收敛到方程的熵解？并说明原因。

2.3 高精度算法

一、考虑如下方程

$$u_t + au_x = 0 \tag{1}$$

其中a是常数，选取适当的初值条件和边值条件。

(1) 写出求解方程的Godunov有限体积格式，并给出格式稳定的条件。

(2) 写出求解方程的间断Galerkin格式(Discontinuous Galerkin), 给出合理的数值流通量，并证明格式的稳定性.

2.4 计算机辅助几何设计

一、(10分) 证明Bézier曲线的弧长不超过其控制多边形的周长。

二、(10分) 试推导椭球面$3x^2+2y^2+z^2=1$的双3次有理Bézier曲面表示。

三、(10分) 给定结点向量$T=(1,2,3,4,5,6,7,8)$，求B样条基函数$N_2^4(t)$在$t=2.5$处的取值。

2.5 计算机图形学

一、(10分) 列举至少2种常见直线绘制算法，并写出伪代码。

二、(10分) 在现代图形处理器(GPU)中，如何高效地表达空间变换?

三、(10分) 以OpenGL（3.0以上）为例，简略介绍光栅化渲染的流程。