

中国科学技术大学博士生资格考试样题

试题名称： 组合与图论

(共 10 题, 每题 10 分)

一、组合数学

- 1 把 n 个不同的球放入 3 个不同的盒子中. 若限定每个盒子中的球数只能为偶数, 试求放球方案数 p_n .
- 2 若数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n$ ($n \geq 2$). 试求 a_n 的通项表达式.
- 3 用 m 种颜色来染图 1 中的顶点. 问有多少种染色方法?

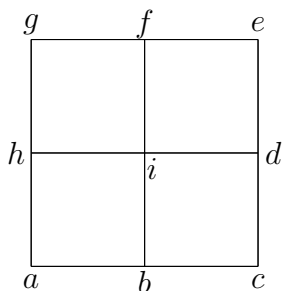


图 1

- 4 设某对称 $(0, 1)$ -矩阵 A 是某 t 阶有限射影平面的关联矩阵. 若 t 不是一个整数的平方, 试证明矩阵 A 的主对角线上恰有 $t + 1$ 个 1.
- 5 证明任一双随机矩阵都可分解为若干个置换阵的乘积.

二、图论

- 6 设 D 是竞赛图且 $k = \max\{\delta^+, \delta^-\} > 0$, 其中 δ^+ 和 δ^- 分别表示 D 的最小出度和入度. 证明: D 含长至少为 $2k + 1$ 的有向圈.
- 7 设 $G = (X \cup Y, E)$ 是 2 部分简单无向图且 $|X| = |Y| = n$ ($n \geq 2$). 证明: 如果对任何不相邻两顶点 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 均有 $d_G(x) + d_G(y) > n$, 那么 G 含 Hamilton 圈.

8 设 $G = (V, E)$ 是阶数 $v \geq 4$ 的简单平面图. 证明:

$$\sum_{x \in V} d_G(x)^2 \leq 2(v+3)^2 - 62.$$

9 证明: 任何阶数至少是 4 且有 ε 条边的三角剖分图都含有 $\frac{3}{2}\varepsilon$ 条边的二部分子图.

10 设 $G = (V, E)$ 为有向图, 其中 V 是节点的集合, E 是边的集合. 把某个节点作为初始点 s , 另一个作为终点 t 而特殊对待. 各边 $e \in E$ 上赋有成本 $c(e)$, 且都取实数值. 在最短路径问题中, 成本 $c(e)$ 解释为边 e 的长度. 试给出最短路径问题的一个多项式时间算法, 并分析其复杂性.