博士生资格考试试题（分析）

Solve five of the following seven problems.

1. 证明或否定：对任何$f \in C[1,\infty)$均存在一列多项式$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，当$n \to \infty$时p_n一致收敛于f.

2. 假设$[a,b]$上函数f不是常值函数, 且$f' = 0$ a.e. 则f一定不满足Lipschitz条件.

3. 设$E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^1(E,m)$且$f \neq 0$. 证明:
$$\int_E |f|^p dm \longrightarrow m(E) \quad \text{as } p \to 0+.$$

4. 对$p > 0$, 设
$$B_p := \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^p < 1 \right\}.$$
求B_p的体积.

5. 设U是复平面上的单位圆盘, i.e. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. 若$f$ 在$U \setminus \{0\}$内解析且满足$\int_U |f|^2 < \infty$, 则0是f的可去奇点.

6. 设f在单位圆盘内解析, 且其导函数满足
$$|f'(z)| < (1-|z|)^{-1},$$
证明其幂级数展开
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
中的系数满足估计$|a_n| < e$, $n = 1,2,\ldots$, 其中e是自然对数的底.

7. 设E是$C[0,1]$的闭线性子空间, 其元素均是C^1的. 证明E一定是有限维的.